

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ



УТВЕРЖДАЮ:

проректор по научно-методической
и учебной работе

Е.И. Скафа

«21» апреля 2021 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
«ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ»
частично практико-ориентированная дисциплина

Направление подготовки:	<u>01.03.01 Математика</u>
Профиль подготовки:	<u>Математика</u>
Образовательная программа:	<u>Бакалавриат</u>
Квалификация:	Академический бакалавр
Форма обучения:	<u>Очная</u>

Донецк 2021

УТВЕРЖДАЮ:

Декан факультета математики и
информационных технологий

Моисеенко И.А.



«20» апреля 2021 г.

МП

Рабочая программа учебной дисциплины **«Вариационное исчисление и методы оптимизации»** составлена на основании Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования – бакалавриат по направлению подготовки 01.03.01 Математика, утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от «10» января 2018 г. № 8; Государственного образовательного стандарта высшего образования (ГОС ВО) Донецкой Народной Республики (ДНР) (проекта) по направлению подготовки 01.03.01 Математика; Порядка организации учебного процесса в образовательных организациях высшего профессионального образования Донецкой Народной Республики, утвержденного приказом Министерства образования и науки Донецкой Народной Республики от 10.11.2017 г. № 1171 (с изменениями и дополнениями); учебного плана и основной профессиональной образовательной программы высшего образования направления подготовки 01.03.01 Математика, профиля: «Математика», разработанных в ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет».

Разработчик:

доцент кафедры математического анализа
и дифференциальных уравнений,
канд. физ.-мат. наук, доцент

Д. В. Лиманский

Рабочая программа учебной дисциплины утверждена на заседании кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений

Протокол № 9 от «23» марта 2021 г.

Заведующий кафедрой

В. В. Волчков

Рабочая программа учебной дисциплины одобрена учебно-методической комиссией факультета математики и информационных технологий

Протокол № 4 от «14» апреля 2021 г.

Председатель учебно-методической комиссии
факультета математики и информационных технологий

Л. И. Селякова

1. ОБЛАСТЬ ПРИМЕНЕНИЯ И МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

Учебная дисциплина «Вариационное исчисление и методы оптимизации» является частично практико-ориентированной дисциплиной и относится к базовой части образовательной программы. Для изучения данной учебной дисциплины необходимы знания и умения, формируемые *предшествующими дисциплинами* – математический анализ, дифференциальные уравнения, уравнения математической физики, функциональный анализ. Знания и умения, полученные в ходе изучения дисциплины «Вариационное исчисление и методы оптимизации» являются основой для изучения *последующих дисциплин*: теоретическая механика, спецкурсы; используются при написании выпускной квалификационной работы.

2. СТРУКТУРА ДИСЦИПЛИНЫ

Характеристика учебной дисциплины	Форма обучения	
	Очная	Заочная
Направление подготовки	01.03.01 Математика	
Профиль	Математика	
Образовательная программа	Бакалавриат	
Квалификация	Академический бакалавр	
Количество содержательных модулей и тем	1 (3)	
Дисциплина базовой / вариативной части образовательной программы	Базовой части	
Формы контроля	1 модульный контроль, зачет в 8-м семестре	
Год подготовки	4	
Семестр	8	
Количество зачетных единиц	3	
Количество часов всего	108	
в т.ч.:		
- лекционных	20	
- практических или семинарских	20	
- лабораторных	-	
- самостоятельной работы	68	
в т.ч. индивидуальное задание	-	
Недельное количество часов	10,8	
в т. ч.: - аудиторных	4	
- самостоятельной работы студента	6,8	

3. ОПИСАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Цель изучения дисциплины «Вариационное исчисление и методы оптимизации» – ознакомление студентов с базовыми понятиями и методами современного вариационного исчисления, с построением и исследованием математических моделей физических явлений, овладение современным математическим аппаратом для дальнейшего использования в приложениях.

Задачи: научиться отыскивать экстремумы функционалов и применять методы вариационного исчисления для решения задач механики, физики и экономики.

Требования к результатам освоения дисциплины. Процесс изучения дисциплины «Вариационное исчисление и методы оптимизации» направлен на формирование элементов следующих **компетенций** в соответствии с ФГОС ВО РФ, ГОС ВО ДНР (проект) по

направлению подготовки 01.03.01 Математика и основной профессиональной образовательной программы высшего образования направления подготовки 01.03.01 Математика, профиля: «Математика»:

Общепрофессиональные компетенции (ОПК):	
ОПК-1	Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности
ОПК-2	Способен разрабатывать, анализировать и внедрять новые математические модели в современных естествознании, технике, экономике и управлении
Профессиональные компетенции (ПК):	
ПК-4	Способен разрабатывать автоматизированные системы управления производством
ПК-5	Способен использовать методы математического и алгоритмического моделирования при анализе управленческих задач в научно-технической сфере, в экономике, бизнесе и гуманитарных областях знаний

Индикаторы достижения компетенций и результаты обучения. Достижение компетенций оценивается на основе таких индикаторов и соответствующих им результатов обучения:

Общепрофессиональные компетенции	Индикаторы	Результаты обучения
ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.И-1. Владеет фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук	Знает литературные источники, включая электронные ресурсы
		Знает основные понятия и утверждения вариационного исчисления
		Знает методику доказательства основных утверждений
		Умеет анализировать и обрабатывать полученную информацию
		Умеет применять полученные теоретические знания для решения стандартных задач
ОПК-2. Способен разрабатывать, анализировать и внедрять новые математические модели в современных естествознании, технике, экономике и управлении	ОПК-2. И-1. Использует методы построения и анализа математических моделей в задачах естествознания, технике, экономике и управлении	Знает методы решения стандартных задач
		Знает принципы построения и анализа математических моделей
		Умеет строить и анализировать математическую модель
		Умеет изложить теоретический материал в доступной для аудитории форме
		Умеет применять на практике математические модели и компьютерные технологии

Профессиональные компетенции	Индикаторы	Результаты обучения
ПК-4. Способен разрабатывать автоматизированные	ПК-4.И-1. Осуществляет деятельность, направленную на	Знает примеры постановок основных вариационных задач
		Знает основные методы решения вариационных задач

системы управления производством (профстандарт 40.057 «Специалист по автоматизированным системам управления машиностроительным предприятием». ОТФ С.6)	решение задач аналитического характера	Знает теоремы о минимумах квадратичных функционалов
		Умеет находить экстремумы функционалов
		Умеет проводить педагогическое наблюдение, использовать различные методы, средства и приемы текущего контроля и обратной связи
ПК-5. Способен использовать методы математического и алгоритмического моделирования при анализе управленческих задач в научно-технической сфере, в экономике, бизнесе и гуманитарных областях знаний	ПК-5. И-1. Разрабатывает, обосновывает и анализирует математические модели	Знает общие подходы к организации исследовательской деятельности
		Знает наиболее популярные разделы математики, не входящие в стандартную программу
		Умеет анализировать ситуацию, осуществлять аргументированный выбор подходящей математической модели
		Умеет готовить информационные материалы

4. ФОРМЫ ОРГАНИЗАЦИИ УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина «Вариационное исчисление и методы оптимизации» предусматривает следующие формы организации учебного процесса: лекции, практические занятия, самостоятельную работу студентов.

Материал излагается с использованием объяснительно-иллюстративных, эвристических и исследовательских методов преподавания. При проведении лекций и практических занятий используются мультимедийные презентации, раздаточные материалы.

В учебном процессе широко применяются активные и интерактивные формы проведения занятий (разбор конкретных ситуаций, дискуссия, полемика), внеаудиторная самостоятельная работа, балльно-рейтинговая система оценки успеваемости, личностно-ориентированное обучение, проблемное обучение. В учебном процессе используются интернет-ресурсы по данному курсу; рассматриваются задачи, максимально приближенные к конкретным практическим ситуациям, самостоятельная работа; контрольные работы.

Самостоятельная работа студентов предусматривает подготовку к практическим занятиям, подготовку конспектов по отдельным вопросам изучаемых тем, изучение учебной и методической литературы, аннотаций статей.

Тематический план дисциплины «Вариационное исчисление и методы оптимизации»

Темы	Вопросы темы
Содержательный модуль 1. Необходимые и достаточные условия экстремума функционалов	
1. Необходимые условия экстремума функционалов	1.1. Простейшая задача вариационного исчисления и ее обобщения. 1.2. Уравнения Эйлера, Эйлера – Пуассона, Остроградского. 1.3.* Задачи на условный экстремум.
2. Достаточные условия экстремума функционалов	2.1. Исследование квадратичного функционала. Сопряженные точки. 2.2. Уравнение Якоби. 2.3.* Необходимые и достаточные условия экстремума функционала.

3. Минимум квадратичного функционала	3.1. Энергетическое пространство. 3.2. Минимум квадратичного функционала. 3.3.* Расширение оператора по Фридрихсу.
--------------------------------------	--

* – практико-ориентированные темы.

Структура дисциплины «Вариационное исчисление и методы оптимизации» по видам учебной деятельности

Названия содержательных модулей и тем	Количество часов							
	Очная форма обучения				Заочная форма обучения			
	Всего	в т.ч.			Всего	в т.ч.		
		Лекции	Практические	Самостоятельная работа		Лекции	Практические	Самостоятельная работа
Содержательный модуль 1. Необходимые и достаточные условия экстремума функционалов								
1. Необходимые условия экстремума функционалов	54	12	12	30				
2. Достаточные условия экстремума функционалов	22	4	4	14				
3. Минимум квадратичного функционала	32	4	4	24				
Итого по содержательному модулю 1	108	20	20	68				
Всего часов	108	20	20	68				

5. ТЕМАТИКА ЛЕКЦИОННЫХ, ПРАКТИЧЕСКИХ И ЛАБОРАТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

Темы лекционных занятий

№ п/п	Название темы	Количество часов	
		Очная форма	Заочная форма
1	Общая постановка вариационной задачи. Примеры	2	
2	Необходимое условие экстремума функционала	2	
3	Простейшая задача вариационного исчисления	2	
4	Решение задачи о брахистохроне	2	
5	Обобщения простейшей вариационной задачи	2	
6	Условный экстремум функционала	2	
7	Вторая вариация функционала. Условие Лежандра	2	
8	Исследование квадратичного функционала	2	
9	Энергетическое пространство оператора	2	
10	Расширение оператора по Фридрихсу	2	
Всего		20	

Тексты лекций приведены в учебном пособии [1].

Темы практических занятий

№ п/п	Название темы	Количество часов	
		Очная форма	Заочная форма
1	Общая постановка вариационной задачи. Примеры	2	
2	Необходимое условие экстремума функционала	2	
3	Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнение Эйлера	2	
4	Решение задачи о брахистохроне	2	
5	Обобщения простейшей вариационной задачи	2	
6	Условный экстремум функционала	2	
7	Вторая вариация функционала. Условие Лежандра	2	
8	Исследование квадратичного функционала	2	
9	Энергетическое пространство положительно определенного оператора	2	
10	Расширение оператора по Фридрихсу	2	
Всего		20	

Планы практических занятий с указанием рассматриваемых вопросов и выполняемых заданий приведены в учебном пособии [1].

6. ОРГАНИЗАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

№ п/п	Название темы	Количество часов	
		Очная форма	Заочная форма
1	Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнение Эйлера	10	
2	Обобщения простейшей вариационной задачи	10	
3	Условный экстремум функционала	10	
4	Вторая вариация функционала. Условие Лежандра	14	
5	Энергетическое пространство положительно определенного оператора	12	
6	Расширение оператора по Фридрихсу	12	
Всего		68	

Содержание самостоятельной работы по темам и методические рекомендации по ее выполнению приведены в учебном пособии [1].

7. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

Содержательный модуль 1. Необходимые и достаточные условия экстремума функционалов.

Теоретические вопросы

1. Первая вариация функционала. Формула. Необходимое условие экстремума функционала в терминах его первой вариации.
2. Простейшая задача вариационного исчисления. Лемма Лагранжа.
3. Первая вариация интегрального функционала. Формула Эйлера.
4. Нахождение экстремалей функционала, зависящего от нескольких функций. Формула Эйлера – Пуассона.
5. Условный экстремум функционала. Решение изопериметрической задачи.

6. Вторая вариация функционала. Необходимое условие экстремума функционала в терминах его второй вариации. Условие Лежандра.
7. Сопряженные точки. Теорема о необходимых и достаточных условиях положительной определенности квадратичного функционала.
8. Уравнение Якоби. Теорема о достаточных условиях слабого экстремума интегрального функционала.
9. Теорема о минимуме квадратичного функционала в энергетическом пространстве. Обобщенное решение операторного уравнения.
10. Расширение по Фридрихсу положительно определенного оператора. Теорема о сохранении нижней грани оператора при его расширении.

Практические умения описываются типами задач, которые должен уметь решать студент. Эти типы соответствуют темам практических занятий, указанных в разделе 5 настоящей программы.

8. ОБРАЗЕЦ ЗАДАНИЯ МОДУЛЬНОГО КОНТРОЛЯ

ГОУ ВПО «ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Образовательная программа: бакалавриат

Направление подготовки: 01.03.01 Математика

Профиль: Математика

Очная форма обучения. Семестр: 8

Учебная дисциплина: Вариационное исчисление и методы оптимизации

Модульная контрольная работа

Вариант № 1

1. Простейшая задача вариационного исчисления. Лемма Лагранжа.
2. Расширение по Фридрихсу положительно определенного оператора.

9. КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ ЗАДАНИЯ МОДУЛЬНОГО КОНТРОЛЯ

Номер задания	Количество баллов
1-2	20
Всего	40

10. КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Самостоятельная работа (включая выполнение СРС) оценивается в 50 баллов. В разрезе отдельных тем оценивание осуществляется следующим образом.

Оценивание СРС по дисциплине «Вариационное исчисление и методы оптимизации»

Названия содержательных модулей и тем	СРС	ИРС
Содержательный модуль 1. Необходимые условия экстремума функционалов		
1. Необходимые условия экстремума функционалов	20	
2. Достаточные условия экстремума функционалов	15	
3. Минимум квадратичного функционала	15	
Итого по 1-му содержательному модулю	50	
Всего баллов	50	

11. КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ ОБЩЕЙ УСПЕВАЕМОСТИ

Общая оценка знаний студентов по дисциплине проводится по 100-балльной шкале согласно таким критериям, приведенным в таблице ниже. *Организационно-учебная работа студента* в аудитории оценивается на основе таких критериев как посещаемость занятий, активность во время проведения лекционных и практических занятий (вопросы лектору по теме лекционного материала, участие в обсуждении пройденного материала, решение задач и ситуаций у доски и т.п.).

Содержательные Модули	Вид работы	Баллы
Содержательный модуль 1	Организационно-учебная работа студента в	10
	Самостоятельная работа	50
	Модульная контрольная работа	40
	Итого	100
Общий итог		100

Порядок оценивания учебных достижений обучающихся

Оценка по шкале ECTS	Оценка по 100-балльной шкале	Оценка по государственной шкале	
		экзамен, дифференцированный зачет	зачет
A	90-100	5 (отлично)	зачтено
B	80-89	4 (хорошо)	зачтено
C	75-79	4 (хорошо)	зачтено
D	70-74	3 (удовлетворительно)	зачтено
E	60-69	3 (удовлетворительно)	зачтено
FX	35-59	2 (неудовлетворительно) с возможностью повторной аттестации	не зачтено
F	0-34	2 (неудовлетворительно) с возможностью повторной сдачи при условии обязательного набора дополнительных баллов	не зачтено

12. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА

Учебные занятия проводятся Главном корпусе университета (г. Донецк, ул. Университетская, 24). Для проведения лекционных и практических занятий требуется аудитория, оборудованная меловой или маркерной доской, мультимедийный проектор и экран, ноутбук, комплект учебной мебели для студентов, рабочее место преподавателя. Выход в Интернет проводной или с использованием Wi-Fi.

Для самостоятельной работы используются текстовые и электронные ресурсы Научной библиотеки университета и других электронных библиотечных баз данных, учебно-методическое обеспечение, представленное в учебно-методическом кабинете (ауд. 505) Главного корпуса.

В процессе обучения студенты имеют возможность использовать учебные материалы по дисциплине «Вариационное исчисление и методы оптимизации», размещенные на платформе Moodle Центра дистанционного образования ГОУ ВПО «ДонНУ». С использованием ресурсов платформы дистанционного образования также осуществляется текущий контроль знаний студентов на основе тестирования и проверки результатов самостоятельной работы.

13. РЕКОМЕНДОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

№ п/п	Наименование	Кол-во экземпляров в библиотеке ДонНУ	Наличие электронной версии в ЭБС
<i>Основная литература</i>			
1.	Лиманский, Д.В. Вариационное исчисление и методы оптимизации: учебное пособие / Д.В. Лиманский; ГОУ ВПО Донецкий национальный университет, Кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений. - Донецк: ГОУ ВПО "ДонНУ", 2017. - 91 с.	20	+
2.	Гельфанд, И.М. Вариационное исчисление / И.М. Гельфанд, С.В. Фомин. – М.: Физматгиз, 1961. – 228 с.	2	
3.	Михлин, С.Г. Курс математической физики / С.Г. Михлин. – М: Наука, 1968. – 576 с.	11	–
<i>Дополнительная литература</i>			
4.	Михайлов, В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных / В.П. Михайлов. – М.: Наука, 1983. – 424 с.	9	-

14. ИНФОРМАЦИОННЫЕ РЕСУРСЫ

Конспект лекций, тексты индивидуальных заданий, книги и методические указания в электронном виде находятся по ссылке:

<https://drive.google.com/drive/folders/0Bz84M0CUwqC8V1FZWjE5UzFEaFU?usp=sharing>

15. ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

1. Windows 7 PRO (корпоративная лицензия ДОННУ № 46484614);
2. Microsoft Office (корпоративная лицензия ДОННУ лицензия № 46472919);
3. Microsoft Visual Studio (лицензия программы DreamSpark для высших учебных заведений);
4. Лицензии GPL для свободного программного обеспечения: Антивирус Касперского, Libre Office, Adobe Acrobat Reader, xPDF, Paint.NET.

Рабочая программа рассмотрена и переутверждена на заседании кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений без изменений на 2022 год. Протокол заседания кафедры № 10 от 22.04.2022 г.

Зав. кафедрой


подпись

Вит. В. Волчков
ФИО